

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO HERRAMIENTA PARA LA INTEGRACIÓN DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS

Problem Solving as a Tool for Integrating Mathematical Content

Danilo Díaz¹

Alexis Mayorga²

Abstract

Professors and researchers agree that problem solving is a fundamental part of teaching and learning mathematics, and that through this approach, students display the potential and usefulness of mathematics in different contexts. On the other hand, there is a question about the division of mathematical contents, because they are often worked as isolated issues without relating them. This article aims to show a range of problems of mathematical context. Given a national curriculum content of secondary education, interactions with other topics inside or outside the learning core are required to be solved.

Key words: *Problem-solving - context - intra-mathematical - secondary education.*

Resumen

Profesores e investigadores coinciden en que la resolución de problemas es una parte fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, ya que mediante su abordaje, los estudiantes visualizan la potencialidad y utilidad de la matemática en diferentes contextos. Por otro lado, existe un cuestionamiento sobre la parcelación de los contenidos matemáticos, puesto que a menudo son trabajados como temas aislados y sin relacionarlos. El presente artículo tiene como objetivo mostrar una gama de problemas de contexto matemático, donde dado un contenido del currículum de enseñanza secundaria nacional se requiere para su resolución la interacción con otros tópicos dentro o fuera del eje de aprendizaje.

Palabras Clave: Resolución de problemas - contexto - intra matemático -

¹ Profesor Colegio Proyección Siglo XXI, Osorno, Chile. E-mail: ddiaz01@hotmail.com

² Profesor Colegio Proyección Siglo XXI, Osorno, Chile. E-mail: alexismayorga@gmail.com

educación media.

Artículo Recibido: 10 de Febrero 2014

Artículo Aceptado: 11 de Abril 2014

Problemática

La enseñanza de la matemática en Chile, en gran parte, está centrada en el trabajo con algoritmos, con pocas aplicaciones en las diferentes áreas del conocimiento (Aravena, 2011; Aravena & Caamaño, 2007). Dentro de la matemática, del proceso de enseñanza aprendizaje y de la resolución de problemas, se ha detectado diferentes desafíos: (1) escasa interacción con otras disciplinas y una parcelación al interior de la matemática, en particular en los tópicos de álgebra y geometría (Díaz & Poblete, 1998; Aravena & Caamaño, 2007; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008; Díaz, Mundana & Vergara, 2009; Aravena, 2011); (2) rechazo a la asignatura de matemática y negativa a su estudio (Díaz & Sánchez, 2011; Díaz, 2012); (3) dificultades en la resolución de problemas, en la comprensión de los enunciados y la transición del registro verbal al algebraico (Segura, 2004; Díaz, Mundaca & Vergara, 2009; Díaz, 2010); (4) falta de autonomía en trabajo del estudiante (Díaz, Mundana & Vergara, 2009).

Las consideraciones anteriores han motivado buscar, crear y proponer una gama de actividades de resolución de problemas, en el contexto matemático, que integren contenidos de la educación secundaria chilena, para visualizar la utilidad de la matemática y solucionar problemas dentro de la misma disciplina, en función del concepto de matemática cotidiana señalada y explicada por Arcavi (2006)

Marco teórico

Ejercicios y Problemas

Resolver un ejercicio consiste en aplicar un algoritmo de forma más o menos mecánica, donde se puede definir con rapidez si se puede resolver o no (Pérez, 2008; Díaz, Mundaca & Vergara, 2009; Díaz, 2010). Pérez (2008), señala que el

trabajar con ejercicios en las clases de matemática ha generado un mal, ya que los alumnos realizan un juicio superficial y concluyen si pueden o no resolverlo, lo que provoca un desencanto por las actividades y por la asignatura.

Por otro lado, un problema se entiende como una situación que genera un bloqueo temporal, ya que la técnica que el estudiante ha utilizado habitualmente no funciona (Pérez, 2008). Además, implica crear un contexto donde los datos tengan sentido y cierta coherencia (Díaz, Mundaca & Vergara, 2009), donde se debe discriminar datos, escoger operaciones, estimar rango de las respuestas, entre otras consideraciones. Para Dijkstra (1991), resolver un problema es un proceso cognitivo complejo en el que interviene y se necesita conocimiento almacenado en la memoria a corto y a largo plazo.

Tabla N° 1
Diferencia entre Ejercicio y Problema (Pérez, 2008)

Aspecto	Ejercicio	Problema
Comprensión	Se entiende de inmediato en qué consiste la cuestión y cuál es el medio para resolverlo.	No se sabe a primera vista cómo atacarlo y resolverlo; a veces ni siquiera se ve claro en qué consiste el problema.
Objetivos	Es que el alumno aplique de forma mecánica conocimientos y algoritmos ya adquiridos y fáciles de identificar.	Es que el alumno busque, investigue, utilice la intuición, profundice en el conjunto de conocimientos y experiencias anteriores y elabore una estrategia de resolución.
Aplicación	Son cuestiones cerradas.	Están abiertos a posibles variantes y generalizaciones y a nuevos problemas.

Aspecto	Ejercicio	Problema
Motivación	No suele implicar la afectividad.	Supone una fuerte inversión de energías y de afectividad. A lo largo de la resolución se suelen experimentar sentimientos de ansiedad, de confianza, de frustración, de entusiasmo, de alegría, etc.
Tiempo	Exige poco tiempo y éste se puede prever de antemano.	Exige un tiempo que es imposible de prever de antemano.
Textos	Abundan.	Son escasos.

Sobre la importancia de la resolución de problemas, De Guzmán (1984), señala que el trabajar resolución de problemas es el corazón de la matemática, pues es la instancia donde se puede conocer la atracción que han tenido los matemáticos de todos los tiempos, ya que trabajando problemas adecuados se generan actitudes positivas hacia la disciplina. En este mismo sentido, Gaulín (2001) señala: “*Polya dice: "Hacer matemáticas es resolver problemas", y para dar una buena idea a los alumnos de lo que es hacer matemáticas, hay que darles problemas para resolver, problemas. , no ejercicios..., ¡¡problemas!!*, para buscar, reflexionar, buscar mucho, investigar...”

Modelos para la Resolución de Problemas

Polya (1957) señala cuatro etapas para la resolución de un problema:

1. Comprender el problema: sintetiza la información dada y la que desea determinar.
2. Desarrollar un plan: establece la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula.

3. Llevar a cabo el plan: resuelve la ecuación, evalúa la fórmula, identifica el término constante del patrón, según sea el caso.
4. Revisar: confronta la solución con contexto del resultado para analizar la coherencia.

Este modelo ha motivado el estudio y adaptación de etapas para la resolución de problemas. Es así, como Mason, Burton & Stacey (1988) plantean el siguiente modelo:

1. Abordaje: comprender el problema
2. Concebir un plan
3. Ataque: llevar a cabo el plan
4. Revisión: reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan

Bransford y Stein (1988), plantean un modelo IDEAL de resolución de problemas con las siguientes etapas:

1. I= Identificar el problema.
2. D= Definir y presentar.
3. E= Explorar distintas estrategias.
4. A= Actuar de acuerdo con las estrategias.
5. L= Logros, observación y evaluación.

Otro modelo es el planteado por De Guzmán (1991), que plantea uno modelo con las siguientes etapas:

1. Familiarización con el problema
2. Búsqueda de estrategias
3. Llevar adelante la estrategia
4. Revisar el proceso y sacar consecuencias

Tipología de Problemas

Blanco (1993), plantea las siguientes actividades relacionadas con la resolución de problemas:

- 1) Ejercicio de reconocimiento
- 2) Ejercicios algorítmicos o de repetición

- 3) Problemas de traducción simple o compleja
- 4) Problemas de procesos
- 5) Problemas sobre situaciones reales
- 6) Problemas de investigación matemática
- 7) Problemas de puzles
- 8) Historias matemáticas

Díaz & Poblete (1999) realizan una clasificación de problemas matemáticos, entre rutinarios y no rutinarios. Los rutinarios, a su vez, se clasifican según su contexto en:

1. Problemas de contexto real
2. Problema de contexto realista
3. Problema de contexto fantasista
4. Problema de contexto puramente matemático

Matemática cotidiana

Arcavi (2006) habla sobre matemática cotidiana, justificada porque los contenidos matemáticos son, para muchas personas, muy importantes en el diario vivir, por lo que es fundamental incluirlas en su enseñanza, presentadas en diferentes contextos y prácticas. Así, también habla de la cotidianidad de la matemática académica, en relación a las actividades desarrolladas por personas ligadas al área (matemáticos, ingenieros, profesores) y donde se debe incluir a los estudiantes. Lo anterior, se debe a que las diferentes expresiones cotidianas de la matemática académica influyen en la experiencia y en la forma de abordar y resolver problemas en diferentes contextos. Es decir, los estudiantes deben trabajar con problemas de diferentes contextos para tener más y mejores herramientas para solucionar otros problemas, por lo que no se pueden dejar de lado los problemas de contexto matemático, ya que la cotidianidad matemática va a depender de la actividad que se quiere desarrollar en el futuro o simplemente para dar soluciones de contactos no matemáticos.

Problemas de Contexto Matemático que Permiten Integrar Contenidos de Educación Secundaria

La resolución de problemas es la actividad matemática por naturaleza (Chamorro & Vecino, 2003; Pino & Blanco, 2008), por lo que aprender a resolver problemas es la principal razón para estudiar matemática (Pino & Blanco, 2008).

La resolución de problemas es un tema transversal en el proceso de enseñanzaaprendizaje, que tiene su fundamento en el desarrollo de razonamientos más o menos complejos y no simplemente de una actividad de asociación y de carácter rutinaria. Estos problemas pueden ser presentados de diferentes formas (verbales, gráficas, tablas, esquemas, etc) y en diferentes contextos. Para el desarrollo de esta propuesta se ha pensado trabajar solamente con problemas de contexto matemático, que son importantes para el desarrollo del pensamiento en los estudiantes y permiten tener una visión más amplia de la matemática sobre la disciplina, disponiendo de una gama muy amplia de estrategias para resolver problemas en diferentes circunstancias.

El desafío para los profesores de matemática, de los diferentes niveles educacionales, es diseñar y aplicar actividades centradas en la resolución de problemas para percibir la potencialidad de la matemática y focalizadas en la necesidad de justificar los pasos aplicados, como una forma de contribuir al desarrollo de la abstracción.

Es por lo anterior que se presenta un grupo de actividades, para ser utilizadas por profesores y estudiantes de educación secundaria nacional, centradas en la resolución de problemas de contexto matemático con el objetivo de integrar temas y áreas abordados en matemática, en respuesta a lo señalado por Aravena y Caamaño (2007) y Aravena, Caamaño y Giménez (2008), sobre la parcelación de los contenidos de la misma matemática escolar.

Tabla N° 2
Problema 1

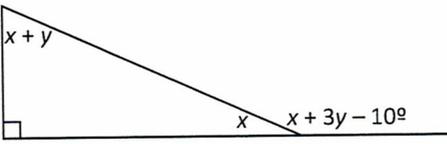
Indicador	Descripción
Enunciado	Determina "x" e "y" en cada caso: 
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Relaciones angulares en un triángulo: ángulos suplementarios y complementarios

Tabla N° 3
Problema 2

Indicador	Descripción
Enunciado	Un rectángulo tiene un perímetro de 392 metros. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 52 metros más de largo que de ancho.
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Formulas de área de figuras geométricas

Tabla N° 4
Problema 3

Indicador	Descripción
Enunciado	En el sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + ky = s \end{cases}$ ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema no tenga solución? ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema tenga infinitas soluciones? ¿Qué condiciones deben satisfacer "k" y "s" para que el sistema tenga una solución?
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Relación entre rectas secantes, paralelas y coincidentes en el plano Cartesiano

Tabla N° 5
Problema 4

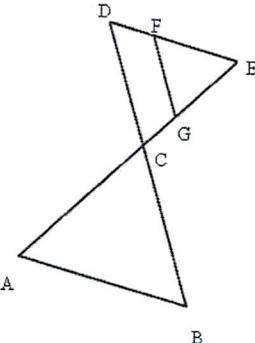
Indicador	Descripción
Enunciado	<p>En la figura que se muestra a continuación, $(AB) \parallel (DE)$ y $(CD) \parallel (FG)$. Si $AC = x + 4$, $BC = x + 1$, $CD = y + 3$, $CG = x - 0,8$, $GE = x + 2,4$, $FG = x$. Determinar el valor de las incógnitas usando Sistema de Ecuaciones</p> 
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Teorema de Thales - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Tabla N° 6
Problema 5

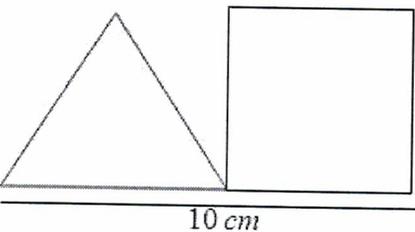
Indicador	Descripción
Enunciado	<p>En la siguiente figura, se tiene un triángulo equilátero y un cuadrado de igual perímetro, ¿Cuánto mide el lado de cada figura?</p> 
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Perímetro de figuras geométricas (triángulos y cuadrados)

Tabla N° 7
Problema 6

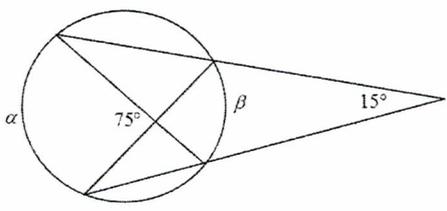
Indicador	Descripción
Enunciado	Calcular los ángulos pedidos α y β . 
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Propiedades angulares en la circunferencia: teorema del ángulo interior y exterior - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Tabla N° 8
Problema 7

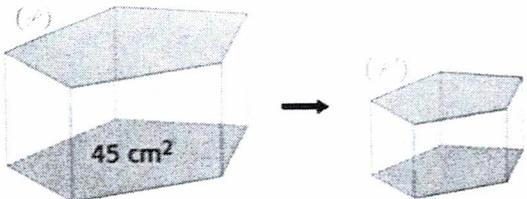
Indicador	Descripción
Enunciado	Sea un prisma recto (P) donde el área de la base es igual a 45 cm^2 , y (P') su reducción a escala 2:3.  <ol style="list-style-type: none"> a. Calcular al área A' de la base del prisma P' b. El volumen del prisma (P') es igual a 80 cm^3. Calcular el volumen del prisma (P)
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Área y volumen de cuerpos geométricos - Semejanza de figuras planas, relación entre el área y el volumen de cuerpos geométricos semejantes.

Tabla N° 9
Problema 8

Indicador	Descripción
Enunciado	<p>Dado en triángulo de vértices A(1,3); B(6,1) y C(5,6). Determinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Coordenadas del Circuncentro - Coordenadas del Ortocentro - Coordenadas del Baricentro. - Perímetro - Área
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Ubicación de puntos en el plano cartesiano - Pendiente de una recta - Distancia entre puntos - Punto medio - Elementos y rectas notables en un triángulo - Rectas paralelas y perpendiculares - Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas - Formula de Herón para área de triángulos

Tabla N° 10
Problema 9

Indicador	Descripción																					
Enunciado	<p>La siguiente tabla resume el peso de los estudiantes de un colegio.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Kilogramos</th> <th>Frecuencia</th> <th>F. Absoluta</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>30-39</td> <td>81</td> <td>81</td> </tr> <tr> <td>40-49</td> <td>102</td> <td>183</td> </tr> <tr> <td>50-59</td> <td>75</td> <td>258</td> </tr> <tr> <td>60-69</td> <td>36</td> <td>294</td> </tr> <tr> <td>70-79</td> <td>18</td> <td>312</td> </tr> <tr> <td>80-89</td> <td>7</td> <td>319</td> </tr> </tbody> </table> <p>Calcular la mediana aplicando el principio de proporcionalidad del teorema de Thales.</p>	Kilogramos	Frecuencia	F. Absoluta	30-39	81	81	40-49	102	183	50-59	75	258	60-69	36	294	70-79	18	312	80-89	7	319
Kilogramos	Frecuencia	F. Absoluta																				
30-39	81	81																				
40-49	102	183																				
50-59	75	258																				
60-69	36	294																				
70-79	18	312																				
80-89	7	319																				
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Medidas de Tendencia Central: Mediana - Teorema de Thales 																					

Tabla N° 11
Problema 10

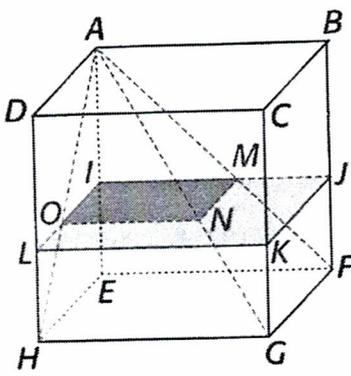
Indicador	Descripción
Enunciado	<p>ABCDEFGH es un cubo de arista 5 cm en el que se inscribe la pirámide AEFHG. Se traza un plano paralelo a la cara EFGH y pasa por el punto I, tal que $AI = 3$ cm</p>  <p>a. Calcular el perímetro de la figura determinada por la intersección de la pirámide y el plano paralelo a la base</p> <p>b. Calcular área y volumen AEFHG y AIMNO</p>
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Perímetro de la figura - Homotecias - Área y volumen de cuerpos inscritos.

Tabla N° 12
Problema 11

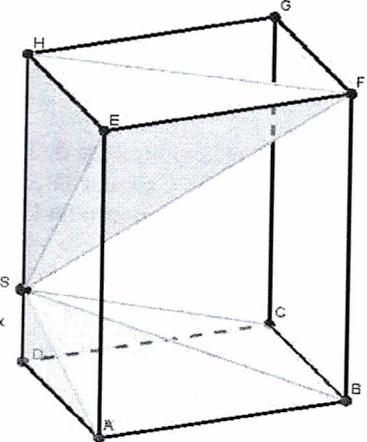
Indicador	Descripción
Enunciado	<p>ABCDEFGH es un paralelepípedo recto tal que: $AB=4$ cm; $BC=3$ cm; $AE=6$ cm.</p> <p>Un punto S, sobre [DH], define las pirámides SABCD y SEFH. Si $DS = x$</p>  <p>a. Expresar los volúmenes V_1 y V_2 de SABCD y SEFH en función de x.</p> <p>b. ¿Cómo elegir x para que $V_1 = V_2$ y $V_1 = V_2$?</p>
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Desigualdades - Ecuación de primer grado - Volumen de una pirámide

Tabla N°13
Problema 12

Indicador	Descripción
Enunciado	<p>Las dimensiones de un paralelepípedo son (en cm): $EH=8$; $DH=10$; $GH=12$.</p> <p>La pirámide de cúspide D y de base EFGH es cortada por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto I. Trazar la sección IJKL que es la intersección del plano paralelo con la pirámide. J, K y L son respectivamente sobre DR, DF y DG.</p>

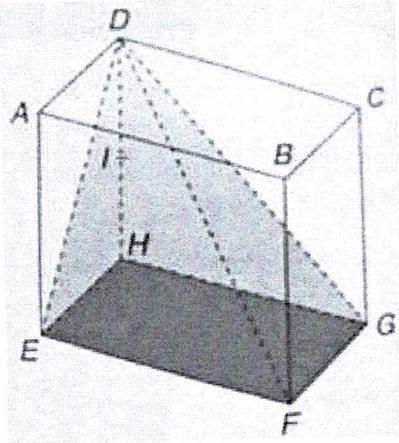
	 <p>a. ¿Cuál es la naturaleza de IJKL?</p> <p>b. Si $IH=4$ cm. Calcular DI, mostrar que $IJ=4,8$ cm y que $IL=7,2$ cm</p> <p>c. Calcular el perímetro de IJKL</p>
Contenidos Relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Semejanza y Teorema de Thales - Perímetro

Tabla N°14
Problema 13

Indicador	Descripción
Enunciado	¿Cuál es el perímetro de un rectángulo que tiene de largo y ancho $\frac{3}{2}\log x$ y $\log x$, respectivamente?
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Perímetro de figuras - Propiedades de los logaritmos

Tabla N° 15
Problema 14

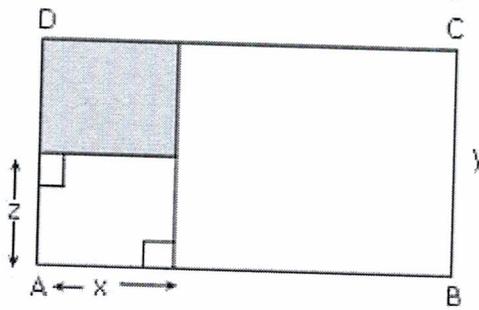
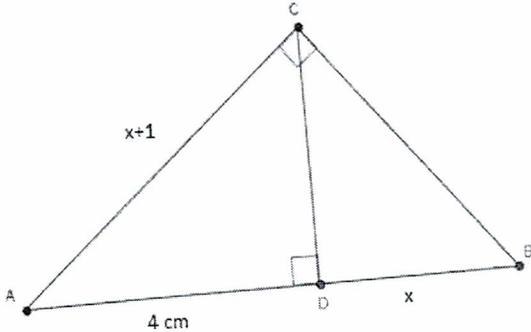
Indicador	Descripción
<p>Enunciado</p>	<p>Si ABCD es un rectángulo, determinar el área de la figura achurada</p> 
<p>Contenidos relacionados</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Perímetro de figuras - Operatoria con expresiones algebraicas

Tabla N° 16
Problema 15

Indicador	Descripción
<p>Enunciado</p>	<p>¿Qué sucede con el área de un rectángulo cuyo largo se triplica y su ancho disminuye al 60%?</p>
<p>Contenidos relacionados</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Área de figuras geométricas - Expresiones algebraicas - Porcentajes

Tabla N° 17
Problema 16

Indicador	Descripción
Enunciado	De acuerdo a los datos de la figura ¿Cuál es la longitud de BC? 
Contenidos relacionados	<ul style="list-style-type: none"> - Ecuación de segundo grado - Teorema de Euclides

Consideraciones finales

La resolución de problemas es una de las actividades fundamentales dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las diferentes disciplinas; es la instancia en que los estudiantes pueden admirar la coherencia que existe entre los contenidos teóricos y lo cotidianos, o entre los diferentes contenidos dentro de una misma área.

Este artículo tiene como propósito hacer un aporte a la enseñanza de la matemática en el nivel secundario chileno entregando algunos problemas que, para su resolución, necesitan relacionar con otros temas dentro del mismo currículum, que muchas veces son parcializados. Estos problemas pueden ser utilizados para introducir unidades nuevas o como actividades de integración de contenidos, buscando que la clase de matemática se convierta en una instancia de indagación cotidiana, de desarrollo del pensamiento lógico matemático, pues la resolución de problemas es transversal en la formación de los estudiantes.

REFERENCIAS

- ARAVENA, M. (2011) Resolución de problemas y modelización geométrica en la formación inicial de profesores. *Acta XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil.
- ARAVENA, M. Y CAAMAÑO, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios Pedagógicos*. 33:7-25
- ARAVENA, M., CAAMAÑO, C. Y GIMÉNEZ, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(1), 49-92.
- ARCAVI, A. (2006) Lo cotidiano y lo académico en Matemáticas. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 63, 3 23
- BLANCO, L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Revista Épsilon*. 25, 49-60.
- BRANSFORD, J. Y STEIN, B. (1988) Solución IDEAL de problemas. Madrid: Labor.
- CHAMORRO M. Y VECINO, F. (2003). El tratamiento y la resolución de problemas. En: Chamorro, M (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación.
- DE GUZMAN, M. (1984). El papel de la Matemática en el proceso educativo inicial. *Enseñanza de las Ciencias*. 2(2), 91 - 95
- DE GUZMÁN, M. (1991) *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- DÍAZ, D. (2010) Sistema de ecuaciones y Resolución de problemas: Una propuesta de enseñanza y aprendizaje. *Memorias III Reunión Pampeana de Educación Matemática*. III, 436-444.
- DÍAZ, D. (2012) Una experiencia de aula usando Matemáticas en la Publicidad.

Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas. 81, 25-33.

- DÍAZ, D., MUNCANA, F. Y VERGARA, J. (2009) Propuesta para la enseñanza del Teorema de Thales mediante resolución de problemas. *Perspectivas Educativas*. Año 9: 283-297.
- DÍAZ, D. Y SÁNCHEZ, J. C. (2011). Aplicando Estadística en problemas actuales. *Premisa*, 51: 3748.
- DÍAZ, M. V. Y POBLETE, A. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos. ¿Una Habilidad Inhabilitante? *Revista Épsilon. Número Monográfico.* 42, 409-423.
- DÍAZ, V., POBLETE, A. (1999). *Evaluación de los aprendizajes matemáticos en la enseñanza secundaria en el marco de la Reforma Educacional*. Proyecto Nacional Fondecyt N°1990558, Chile.
- DIJKSTRA (1991). Instructional design models and the representation of knowledge and skills. *Educational Technology*, 31 (6), 19-26.
- GAULÍN, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 19: 51-63.
- MASON, J.; BURTON, L. Y STACEY, K. (1988) *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor
- PÉREZ, R. (2008) *Propuesta de un manual para el uso docente, orientado al tratamiento de la resolución de problemas, en la educación matemática de enseñanza media*. Trabajo de graduación para optar al grado de Magister en Educación de las Ciencias con mención en Matemáticas. Universidad de Talca, Chile
- PINO, J. Y BLANCO, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de Matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*. 38, 63-88
- POLYA, G. (1957). *How to Solve it*. N.J.: Princeton: University Press.