APROXIMACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN EN ENSEÑANZA BÁSICA

Approach to Demonstration at Basic School Level

Danilo Díaz Levicoy [1]

Raúl Olivares Ibarra [2]

Abstract

Demonstration in Mathematics is understood as argumentative schematas that intend to convince a certain type of audience about the veracity or falseness of a statement. Demonstration has been excluded from Chilean primary and high-school teaching, since it is an exclusive issue of university training. In this article, a theoretical framework about demonstration is presented and also a group of activities of justification and demonstration according to plans and programs of Mathematics Education for 8th grade primary school level and Curriculum Adjustment Chilean education is carrying out at present.

Key words: Demonstration - Plans and Programs - Curricular Adjustments - Elementary Education.

Resumen

La demostración en Matemática la entendemos como esquemas argumentativos que buscan convencer a cierto tipo de auditorio de la veracidad o la falsedad de una afirmación. La demostración ha sido excluida de la enseñanza primaria y secundaria chilena, pasando a ser un asunto exclusivo de la formación universitaria.

[1]Profesor de Matemática y Computación. Colegio Proyección Siglo XXI, Osorno. E-mail: dddiaz01@hotmail.com

[2]Profesor de Física y Matemática. Colegio Instituto Presidente Errázuriz, Las Condes, Santiago. E-mail: raulolivares2006@gmail.com

En este artículo se presenta un referente teórico sobre la demostración y un grupo de actividades de justificación y de demostración acorde a los Planes y Programas de Educación Matemática de Octavo Básico y al Ajuste Curricular por el que atraviesa la Educación Chilena.

Palabras Clave: Demostración - Planes y Programas - Ajuste Curricular - Educación Básica.

Marco teórico

La demostración

Diferentes autores indican que el término demostración, es una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. En matemática, es una afirmación en la que se verifica su verdad o falsedad con la ayuda de reglas de deducción tomadas de un conjunto de reglas bien definidas cuya validez es compartida por los matemáticos (Balacheff, 1987; Duval, 1993, Godino & Recio, 2001; Bernardis & Moriena, 2009; Moraga & Díaz, 2009).

En resumen, la demostración de una propiedad matemática, es una sucesión de pasos que conducen a la conclusión deseada (Díaz, 2008; Moraga & Díaz, 2009).

Funciones de la demostración

Tradicionalmente, se ha considerado que el fin primordial de la demostraciónconsiste en verificar la proposición objeto de estudio (Carrillo & Vicario, 2005; Díaz, 2008; Díaz, Fuenzalida & Moraga, 2008; Díaz, 2009a; Moraga & Díaz, 2009; Fuenzalida, et al, 2009a; Fuenzalida, et al, 2009b). Sin embargo, a continuación se presenta un modelo en el que se distinguen varias funciones (de Villiers, 1993):

- **Verificación**: concerniente a la verdad de una afirmación. Comprobación y convencimiento.
- **Explicación**: profundizando por qué es verdad.

- **Sistematización**: organización de resultados dentro de *un Sistema Deductivo* en axiomas, conceptos fundamentales y teoremas.
- **Descubrimiento**: el descubrimiento o invención de nuevos resultados.
- **Comunicación**: transmisión del conocimiento matemático.

La demostración y los niveles Van Hiele

La Teoría de Pensamiento Geométrico de Van Hiele desarrollada en los años 50 por los esposos Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, es un modelo que trata de explicar cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes y cómo puede el profesor ayudar a sus alumnos para que mejoren la calidad de su razonamiento, mediante sus Niveles y Fases, respectivamente.

La relación existente entre la demostración y la Teoría de Van Hiele, está dada en sus niveles, lo que se detalla a continuación (Jaime, 1993; Jaime, 1994; Corberan et al, 1994; Denis, 1994; Beltrametti, Esquivel & Ferrari, 2003; Cabezas, Aravena & Caamaño, 2005; Barrera & Centeno, 2006; Bernardis & Moriena, 2009; Díaz, 2009b):

Nivel 1 (Reconocimiento o visualización): No existe demostración. Toda conclusión se obtiene mediante la observación y la manipulación de la figura. No suelen reconocer las partes que componen las figuras ni sus propiedades matemáticas. Los objetos se perciben como un todo.

Nivel 2 (Análisis): Muestran una ausencia explícita de comprensión de qué es una demostración matemática (demostración empírica). Sólo reconocen las propiedades matemáticas mediante la observación de las figuras y sus elementos, pero no pueden relacionar estas propiedades; los estudiantes pueden deducir otras propiedades generalizándolas a partir de la experimentación.

Nivel 3 (Clasificación o deducción informal): Los alumnos son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones, sin embargo, sus razonamientos lógicos se siguen apoyando en la manipulación. Los estudiantes no entienden la necesidad de encadenamiento de estos pasos, ni entienden la estructura de la demostración. Pero, pueden comprender demostraciones formales cuando se las explica el profesor o cuando se presentan en libros, aunque no las entienden como un todo.

Nivel 4 (Deducción formal): Alcanzando este nivel, los estudiantes pueden entender y realizar demostraciones (de varios pasos) que ya tienen sentido para ellos y sienten su necesidad como medio para verificar la verdad de una afirmación. Además, comprenden la estructura axiomática de la matemática y aceptan la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas y son capaces de demostrar su equivalencia.

Nivel 5 (Rigor): Aquí los estudiantes adquieren conocimientos y habilidades propias de los matemáticos profesionales, centrándose en el máximo nivel de rigor matemático, donde pueden trabajar en una variedad de sistemas axiomáticos y compararlos.

Este modelo testifica que el aprendizaje de la demostración, es un camino largo que los estudiantes deben recorrer y que la realización de demostraciones corresponde a un nivel superior de razonamiento matemático (Bernardis & Moriena, 2009).

Algunas formas de demostración

La presentación de las demostraciones en matemática, sigue el método deductivo que heredamos desde los "Elementos" de Euclides en el cual a partir de ciertos axiomas básicos, se deducen todas las verdades geométricas de la geometría elemental. Toda proposición expuesta está relacionada a axiomas previos, definiciones y proposiciones.

A continuación, se presenta algunos tipos de demostración que se "deberían" utilizar con mayor frecuencia en la Educación Básica y Secundaria Nacional (Díaz, 2008).

Demostración directa: Consiste en obtenerla mediante una sucesión de proporciones encadenadas por reglas de deducción. Es adquirirla de los axiomas haciendo uso de las reglas de deducción.

Inducción Matemática: Este método de demostración se conoce también como Principio de Inducción Completa o Finita o Quinto Axioma de Peano, el cual señala que:
"Si una proposición $\boldsymbol{q}$ expresada en términos de una variable $\boldsymbol{n}$ que pertenece a los números naturales, cumple que:

1) Es verdadera para $n = 1$ (o algún otro valor si fuese necesario); y si,
2) A partir del supuesto de que, es válida para $n = k$, se deduce que también es válida para $n = k + 1$, entonces dicha proposición $\boldsymbol{q}$ es válida para cualquier número natural"

Demostración indirecta (Reducción al absurdo): Supongamos que se desea demostrar la proposición P. El procedimiento consiste en demostrar que asumiendo como cierta la falsedad de P (o sea, P *negada*) conduce a una contradicción lógica. Esta P no puede ser falsa, por lo que ha de ser verdadera.

Contraejemplo: Se utiliza para demostrar la NO universalidad de un postulado, para lo cual se utiliza un ejemplo.

Ajuste curricular Octavo Año Básico

Con la modificación de los contenidos matemáticos a trabajar de los diferentes niveles de la formación primaria y secundaria de nuestro país, se pretende que los (las) alumnos (as) posean herramientas conceptuales para analizar la información cuantitativa presente en las noticias, opiniones, publicidad y diversos textos, aportando al desarrollo de las capacidades de comunicación, razonamiento y abstracción (Mineduc, 2009). Para el sector de Matemática, los contenidos se agrupan en cuatro grandes ejes: Números, Algebra, Geometría y Datos y Azar.

Propuesta para la aproximación a la demostración en Octavo Básico

La demostración es necesaria en la escuela, para que los estudiantes encuentren el significado a lo que "merece durar" en el aspecto cognoscitivo (teoremas y propiedades) y que le ayudarán a construir conocimiento de manera autónoma, además, ningún resultado en matemáticas se puede considerar válido, hasta que no sea demostrado de manera formal. Sin embargo, la realidad nacional nos muestra que la demostración no es parte de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en las diferentes unidades educativas, debido a que la enseñanza de la disciplina se ha centrado en el uso de algoritmos que son útiles a los estudiantes para tener logros académicos (SIMCE y PSU), dejándola como un privilegio de la formación universitaria (Díaz, Fuenzalida & Moraga, 2008; Díaz, 2009a; Moraga & Díaz, 2009).

El desafío para los educadores en matemática está en diseñar actividades para lograr que los alumnos valoren la necesidad de justificar sus construcciones y conjeturas. Por lo cual, cuanto antes sea la introducción de la demostración, ésto será mejor.

Es por lo anterior que, a continuación, se presenta un grupo de actividades, según ejes temáticos, para ser utilizadas en Octavo Año Básico, con el objetivo de motivar procesos de verificación de propiedades, conjeturas y, posteriormente, la demostración, si está de acuerdo al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Estas últimas, pueden ser realizadas por el profesor, explicando paso a paso, con ayuda de los estudiantes o como actividad para los estudiantes, en función de la dificultad y pertinencia de las actividades.

Eje Números

1. Verificación de las propiedades de los Números Reales y de los conjuntos numéricos que contiene (Enteros y Racionales)

Verificar los Axiomas de Cuerpo de los Números Reales y los teoremas que se deducen de ellos, es de vital importancia para que los alumnos reconozcan la abstracción y generalización de los resultados, además de permitir a los estudiantes conocer las estructuras algebraicas sobre las cuales están trabajando y familiarizarlos con elementos de la matemática elemental.

Respecto a la suma

- Conmutatividad:
- Asociativa
- Elemento Neutro
- Inverso aditivo: Dado

Respecto a la multiplicación

- Conmutatividad:
- Asociativa
- Elemento Neutro
- Inverso Multiplicativo: Dado con
- Propiedad Distributiva

Ejemplo:

Verificación Propiedad Distributiva

$$5\cdot(-2+6)=5\cdot(-2)+5\cdot 6$$
$$5\cdot(4)=-10+30$$
$$20=20$$

1. Demostración de teoremas sencillos derivados de los Axiomas de cuerpo de los Números Reales

El adecuado conocimiento de las propiedades de los Números Reales permite a los estudiantes tener un dominio de las estructuras algebraicas sobre la que trabajó, que son aspectos de una matemática avanzada. Además, ayuda a la comprensión de otros contenidos que se abordarán en años escolares superiores.

Ejemplo:

Demostrar: $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad+cb}{bd}$, $\forall a,b,c,d \in R$ y $a,b \neq 0$

Demostración:

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=ab^{-1}+cd^{-1}$	Definición de División
$=ab^{-1}\cdot 1+cd^{-1}\cdot 1$	Neutro Multiplicativo
$=ab^{-1}(dd^{-1})+cd^{-1}(bb^{-1})$	Inverso Multiplicativo
$=ad(b^{-1}d^{-1})+cb(b^{-1}d^{-1})$	Conmutatividad y Asociatividad
$=ad(bd)^{-1}+cb(bd)^{-1}$	Por teorema $(ab)^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, $\forall a,b \in R$
$=(ad+cb)\cdot(bd)^{-1}$	Distributividad
$=\dfrac{ad+cb}{bd}$	Definición de División

1. Demostración de Propiedades de las Potencias

Para este contenido, es necesaria la introducción a sencillas demostraciones, puesto que facilita el aprendizaje de los alumnos en el momento del desarrollo de los ejercicios propuestos, ya que muchas veces cometen errores al aplicar mal las propiedades.

Propiedades:

a. $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$

b. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

c. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

d. $a^n : a^m = a^{n-m}$

e. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

f. $(a)^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

g. $a^0 = 1$

Ejemplo:
Demostrar: $a^0 = 1 \quad \forall a \in R$ y $a \neq 0$

Demostración:

$a^0 = a^{n-n}$	Neutro Aditivo
$= a^n \cdot a^{-n}$	Propiedad d)
$= a^n \cdot \dfrac{1}{a^n}$	Propiedad f)
$= \dfrac{a^n}{a^n}$	Multiplicación de Potencias
$= 1$	Reducción

Eje Álgebra

1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Las ecuaciones constituyen una de las unidades matemáticas de suma importancia, presente en diferentes niveles de nuestra educación nacional y tratada con distinta complejidad (Santibáñez, Díaz & Romo, 2009); lamentablemente, la enseñanza de las ecuaciones está basada en mecanización de reglas y en el desconocimiento de las propiedades de los números reales, que permite justificar su resolución (Olfos, 2006).

Frente a esta preocupante realidad, se plantea el uso adecuado de las propiedades de los números reales para la resolución de ecuaciones, como se muestra a continuación.

Ejemplo:

Resolver la siguiente ecuación $3(x-4)=2(x-1)$ justificando adecuadamente cada paso.

Solución:

$4(x-4)=2(x-1)$		Distributiva
$4x-16=2x-2$	$/(+16)$	Inverso Aditivo de (-16)
$4x-16+16=2x-2+16$		Clausura y Neutro Aditivo
$4x=2x+14$	$/(-2x)$	Inverso Aditivo de (2x)
$4x-2x=2x-2x+14$		Clausura y Neutro Aditivo
$2x=14$	$/\left(\cdot\frac{1}{2}\right)$	Inverso Multiplicativo de 2
$\frac{1}{2}\cdot 2x=\frac{1}{2}\cdot 14$		Clausura y Neutro Multiplicativo
$x=7$		

Eje Geometría

Nadie puede negar que la geometría es un área fundamental de la matemática. A pesar de ésto, son muchas las dificultades que atraviesa el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. En especial, cuando se busca que los alumnos comprendan los temas que se trabajan en el aula y vayan más allá de la memorización de definiciones y propiedades, aplicación de algoritmos o ejercicios.

A continuación, se presenta una serie de actividades para desarrollar niveles de pensamiento geométrico de orden superior, reflejados en la justificación, camino necesario para llegar a la demostración.

1. Actividades que permiten desarrollar la justificación con Isometrías

Traslación

1) Si A\` es la imagen de A por una traslación $T_{\vec{u}}$ y los puntos A y A\` tienen coordenadas (v_1, v_2) y (w_1, w_2) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $\vec{u}$? Justificar.

2) Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a. La Imagen de una línea recta por una traslación es una línea recta. Además, cada recta y su imagen son paralelas.

b. Dado $T_{\vec{u}}$ para todos los puntos P y Q del plano, si P\` Y Q\` son sus respectivas imágenes por traslación, se cumple:

I. $d(P,P`)=d(Q,Q`)$

ii. $d(P,Q)=d(P`,Q`)$

iii. $d(P,Q`)=d(P`,Q)$

Simetría Axial

1) Dados dos puntos, construye una recta en el plano (L_1) y haz la simetría de la recta respecto de L (L_1'). Mueve la recta (L_1) sobre el plano a partir de uno de los puntos que la determinan. ¿Qué sucede cuando (L_1) es paralela, secante y perpendicular al eje? Para cada caso concluye y justifica.

2) Verificar y justificar si es siempre cierta, en algunos casos o nunca.

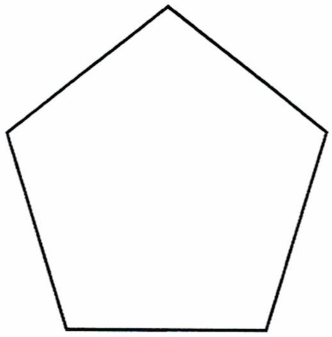
a. Sea R\` la imagen de R mediante una simetría S_e y sea P un punto del eje ***e***

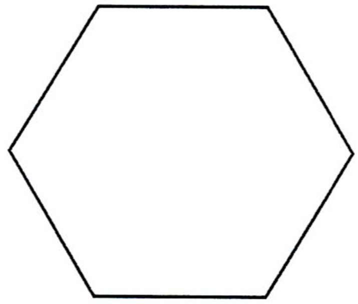
i. ¿Qué tipo de triángulo, según sus lados y según sus ángulos, es $\Delta PRR`$?

ii. Si se coloca P en otro lugar del eje de simetría, ¿será el triángulo $\Delta PRR`$ siempre el mismo?

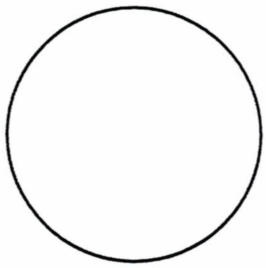
iii. Si se coloca R en otro lugar de la figura y R\` en la posición correspondiente, ¿será el triángulo $\Delta PRR`$ siempre el mismo?

3) Determinar si las siguientes figuras tienen ejes de simetría. Utilizando lápiz y regla no graduada construir los ejes de simetría en el caso que corresponda. Justificar la construcción mediante las propiedades





1) Construye el centro de la siguiente circunferencia utilizando sólo regla y escuadra no graduada. Justifica tu respuesta

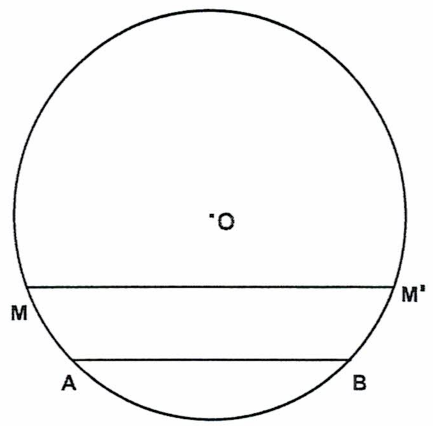


Simetría Central

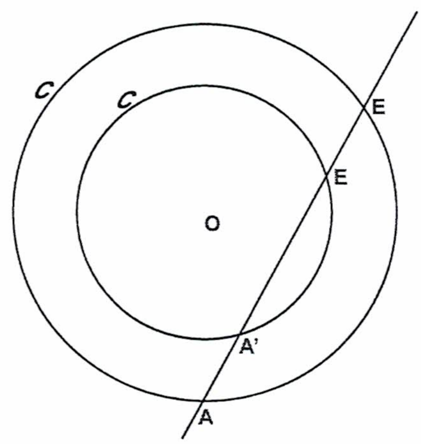
1) Construye un punto en el plano (A) y haz la simetría central del punto respecto de P (A'). Mueve el punto sobre el plano ¿Qué sucede si posamos el punto sobre P? Concluye.
2) Dados dos puntos, construye una recta en el plano (L_1) y haz la simetría central de la recta respecto de P (L_1'). Mueve la recta (L_1) sobre el plano a partir de uno de los puntos que la determinan. ¿Qué sucede con (L_1')? Concluye y justifica.
3) Dada dos rectas secantes cualquiera. Nombra A al punto de intersección. Haz la simetría del punto y la simetría de las rectas. ¿Qué puedes decir de la imagen del punto A?
4) Al círculo C se le ha aplicado una simetría central, que transforma A en A' y C en C'. Sea L la recta tangente a C en A. Construye la imagen de L. Utiliza sólo regla y escuadra no graduadas. Justifica tu respuesta.

1. Actividades que permiten desarrollar la Demostración con Isometrías

1) Sea C un círculo de centro O y [AB] una cuerda del círculo. M y M' son dos puntos del círculo, talque (MM')//(AB). Demostrar que MA=M'B



2) Sean C y C' dos círculos concéntricos distintos de centro O, una recta D corta a C en A y B y corta a C' en A' y B'. Demostrar que AA'=BB'



3) Relación de variación entre el perímetro, área de figuras geométricas y variación de área y volumen en cuerpos geométricos cuando varía el radio de una circunferencia

1) Si los diámetros de dos circunferencias están en la razón 1:2 y 1:4, ¿Cuál es la razón entre el perímetro de estas circunferencias? ¿Y entre las áreas de los círculos?
2) ¿En qué razón están los volúmenes de dos cilindros de igual altura, si el radio de uno de ellos es el doble de la medida del radio del otro?
3) El radio y la altura de un cilindro son iguales al radio de una esfera, ¿Cuál es la relación entre sus áreas? ¿Y entre sus volúmenes?

Datos y azar

1) Algunas actividades sobre justificar y demostrar en torno a la Media Aritmética.
   a. Justificar la siguiente afirmación: "El promedio de dos promedios es diferente al promedio de la totalidad de los datos salvo si ambos grupos de datos tienen el mismo tamaño"

Consideraciones finales

Con este artículo, se quiere hacer un aporte para la enseñanza de la matemática, una enseñanza que pretenda lograr aprendizajes de calidad, llegando más allá de la memorización de propiedades y definiciones y la aplicación de algoritmos sin sentido, cumpliendo un rol fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje de nuestra disciplina. Donde, la verificación, justificación y, en lo posible, la demostración (en función a su madurez cognitiva), sean parte importante de la formación matemática de los estudiantes en los últimos años de la formación primaria y en la secundaria, y no ser exclusivo de la formación terciaria.

Sin duda que, trabajar la demostración en los contenidos matemáticos no es un tema sencillo, por lo que debe venir acompañado de un sólida experimentación de los fenómenos matemáticos, de una manipulación concreta de los temas y de un desarrollo de la justificación, por lo cual, no se puede exigir a los estudiantes demostrar por demostrar, debe ir acompañado de un trabajo gradual y de su desarrollo intelectual, donde se comprenda la necesidad de demostrar las propiedades que trabajan y que su trabajo permite desarrollar destrezas y capacidades matemáticas de orden superior.

Se ha hecho hincapié especial en el área de las isometrías, por ser un contenido que fue incorporado recientemente a los planes oficiales de educación nacional, por las dificultades que presenta a los estudiantes el abordaje de temas geométricos y, lo que es peor, el escaso dominio por parte de algunos profesores de temas geométricos, que los lleva a no abordar ciertos contenidos y la introducción de la justificación, por lo cual, la demostración se ve muy lejana.

BIBLIOGRAFÍA

ABRATE, R; FONT, V. Y POCHULU, M. (2009) Modelos y métodos de resolución de ecuaciones: Obstáculos y dificultades. *Acta VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Puerto Montt, Chile

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18, pp 147-176.

BARRERA, B. Y CENTENO, M. (2006). Evaluación de Niveles de Razonamiento Geométrico en Estudiantes de la Licenciatura en Educación integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 14(2), 141-151

BELTRAMETTI, M.; ESQUIVEL, M. Y FERRARI, E. (2003). Determinación de los niveles de pensamiento geométrico según la Teoría de Van Hiele en estudiantes de Profesorado de Matemática al inicio de un curso de Geometría. *Comunicaciones Científicas y Tecnológicas.* Resumen D-013. Universidad Nacional del Nordeste.

BERNARDIS, S. Y MORIENA, S. (2009) Un entorno favorable a la Demostración. *Acta VII Conferencia Argentina de educación Matemática*. 226-232.

BRAVO, M. Y ARRIETA, J. (2005) Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. 35(3): 1-9

CABEZAS, C., ARAVENA, M. Y CAAMAÑO, C. (2005) Doblado de papel en el primer nivel de razonamiento del modelo didáctico de Van Hiele y su proyección hacia la formalización del Pensamiento Geométrico. *I Seminario de Investigación en Educación Matemática.* Universidad de Los Lagos, Osorno.

CARRILLO, V. Y VICARIO, J. (2005) Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM,* 145-152

CORBERAN, R., GUTIÉRREZ, A., HUERTA, M., PASTOR, A.; MARGARIT, J. B., PEÑAS, A. Y RUÍZ, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Ministerio de Educación y Ciencia.

Secretaría General Técnica. Centro de publicaciones. Madrid

DE VILLIERS, M.(1993) El Papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Épsilon*, 26: 15-30

DENIS, L.(1994). Relaciones entre la etapa de desarrollo cognoscitivo y sus niveles Van Hiele de Pensamiento Geométrico. *Revista UNO*. 2: 5 - 13.

DÍAZ, D., FUENZALIDA, C. Y MORAGA, K. (2008) Recorrido: La Demostración, Planes y Programas, Chile. *Trabajo Final Pasantía "Métodos para la enseñanza de las matemáticas"*. Institut Universitaire de Formation des Maîtres Midi-Pyrénées, Toulouse, Francia.

DÍAZ, D. (2008) Algunas formas de demostración en Matemáticas. *ABACOM Boletín Matemático Universidad Austral de Chile*. Año 7, N° 26, pag. 4.

.... (2009a) La Demostración en los Planes y Programas de Matemática en Secundaria Nacional: Análisis y una propuesta para su acercamiento. *Ciclo de Charlas del Centro de Estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación*, Universidad de Los Lagos, Osorno, Chile.

.... (2009b). *Desarrollo del Pensamiento Geométrico en Estudiantes de Educación Secundaria. Seminario para optar al Título de Profesor de Educación Media Mención Matemática y Computación.* Universidad de Los Lagos, Osorno. Chile.

DUVAL, R. (1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31: 37-61.

FUENZALIDA, C., DÍAZ, D., MORAGA, K. Y LAGOS, K. (2009a) Un Acercamiento a la Demostración Mediante la Simetría Axial y Central. *Acta XXIII Jornada de Matemática de la Zona Sur*, Universidad de Magallanes, Punta Arenas, Chile.

.... (2009b) ¿Cómo trabajar la demostración con la transformación Isométrica de Simetría? *Acta II Congreso Nacional de Estudiantes de Pedagogía en Matemática*, 48-40, Universidad de Santiago de Chile, Santiago, Chile.

GODINO J. D. Y RECIO, A. (2001) Significados instituciones de la Demostración. Implicaciones para la educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*. 19 (3): 405-414

JAIME A. (1993). *Aportaciones a la Interpretación y Aplicación del Modelo de Van Hiele: La Enseñanza de las Isometrías del Plano. La Evaluación del Nivel de Razonamiento*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia. España.

.... (1994) La enseñanza de las isometrías del plano desde la perspectiva del modelo de Van Hiele. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 1, 85-94

MINEDUC (2004). *Matemática, Programa de Estudio Octavo Año Básico.* Segunda Edición, Santiago. Chile

.... (2009) *Propuesta Ajuste Curricular.* Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios: Matemática. Documento aprobado por el Consejo Superior de Educación.

MORAGA, K. Y DÍAZ, D. (2009) *Análisis de la Demostración: Chile v/s Francia.* Monografía no publicada. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP), Chile

OLFOS, R. (2006) Lógica de justificación en la resolución de ecuaciones de primer grado. *Acta XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática.* Viña del Mar.

ROJAS, M (2005) *Libro de Ejercicios Matemática 4°.* Santiago: Santillana.

SANTIBAÑEZ, G., DÍAZ, D. Y ROMO, C. (2009) Concepciones de los Estudiantes que Ingresan a la Carrera de Arquitectura de la Universidad de Los Lagos sobre Ecuaciones de Primer Grado. *Acta XXIII Jornada de Matemática de la Zona Sur.* Punta Arenas, Chile: *Universidad de Magallanes*.

Artículo Recibido: 08 de Mayo de 2012
Artículo Aceptado: 12 de Junio de 2012